

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

СОГЛАСОВАНА

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы

Декан физико-математического факультета

_____/проф. И.А.Танкиев
«27» апреля 2026г.

_____/М.Х.Мальсагов от
от «28» апреля 2026г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.08 Исследовательские задачи в школьной математике

Направление подготовки

01.03.01 –МАТЕМАТИКА

Квалификация выпускника

БАКАЛАВР

Форма обучения

Очная

Магас, 2026г

1. Цели освоения дисциплины

- глубокое изучение студентами основ школьного курса математики;
- знакомство с задачами по математике для общеобразовательных школ и школ и классов с углубленным изучением математики;
- выработка у будущих учителей умений и навыков решения исследовательских задач и задач повышенной сложности;
- воспитание умений проведения различных форм внеклассных занятий.

Учебный курс включает теоретическое обоснование научных основ наиболее универсальных подходов к решению задач повышенной трудности с учетом школьного курса математики; практическое использование полученных знаний для решения указанных задач. При изучении данной дисциплины проводятся практические занятия, направленные на повышение уровня математической подготовки студентов.

Перечень профессиональных стандартов, обобщенных трудовых функций и трудовых функций, соответствующих профессиональной деятельности выпускников

Наименование документа	Код	Наименование базовой группы, должности (профессии) или специальности
ОКЗ	2320	Преподаватели в средней школе
	2340	Преподаватели в системе специального образования

Код и наименование профессионального стандарта	Обобщенные трудовые функции			Трудовые функции		
	Код	Наименование	Уровень квалификации	Наименование	Код	Уровень (подуровень) квалификации
01.001 Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)	А	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	6	Общепедагогическая функция. Обучение	А/01.6	6
				Воспитательная деятельность	А/02.6	6
				Развивающая деятельность	А/03.6	6
		Педагогическая деятельность по проектированию и		Педагогическая деятельность по реализации		

	В	реализации основных общеобразовательных программ	6	программ основного и среднего общего образования	В/03.6	6
--	---	--	---	--	--------	---

Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина Б1.В.08 «Исследовательские задачи в школьном курсе математики» относится к курсам по выбору профессионального цикла дисциплин.

2. Результаты освоения дисциплины (модуля) Исследовательские задачи в школьной математике

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1. Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей; УК-6.2. Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста; УК-6.3. Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК – 6.4. Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития.
ПК-2	Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	ПК-2.1: Знает способы определения видов и типов профессиональных задач, структурирования задач различных групп. ПК-2.2: Выбирает наиболее эффективные методы решения основных типов задач, встречающихся в математике. ПК-2.3: Обладает систематизированными теоретическими и практическим знаниями.

4. Структура и содержание дисциплины (модуля) Исследовательские задачи в школьной математике

4.1. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

Вид учебной работы	Всего	Порядковый номер семестра
		6
Общая трудоемкость дисциплины всего (в з.е.), в том	3 з.е.	3

числе:							
Курсовой проект (работа)				не предусмотрено			
Аудиторные занятия всего (в акад. часах), в том числе:				34		34	
Лекции				18		18	
Практические занятия, семинары (из них <i>практ. подготовка</i>)				16 (*14*)		16 (*14*)	
Лабораторные работы				—		—	
Самостоятельная работа всего (в акад. часах), в том числе:				74		74	
КСР				—		—	
Экзамен				—		—	
Общая трудоемкость дисциплины				108		108	
№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости
			Аудиторная работа			Самостоятельная работа	
			всего	лекции	практ. занятия (из них <i>практ. подготовка</i>)	всего	
1	Научные методы в обучении математике: опыт, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Анализ и синтез в обучении математике.	6	3	1	2 (*1*)	1	Собеседование
2	Виды	6	3	1	2 (*1*)	1	Собеседование

	умозаключений: индукция, дедукция и аналогия в обучении математике.						ие
3	Аксиомы, теоремы и методика работы с ними.	6	6	2	4 (*1*)	2	Коллокви
4	Исследовательск ие задачи в обучении математике. Методика работы с задачами.	6	6	2	4 (*1*)	2	Проверка тестов
5	Методы решения уравнений и неравенств с модулями.	6	6	2	4 (*1*)	2	Проверка контроль работ
6	Методы решения задач, содержащих параметры.	6	6	2	4 (*1*)	2	Проверка контроль работ
7	Методы решения геометрических задач повышенной сложности.	6	6	2	4 (*1*)	2	Проверка контроль работ
8	Методы решения исследовательск их задач теории чисел.	6	6	2	4 (*1*)	2	Проверка контроль работ
9	Методы решения исследовательск	6	6	2	4 (*1*)	2	Проверка контроль работ

	их задач алгебры.						
10	Методы решения олимпиадных задач.	6	6	2	4 (*1*)	2	Проверка контрольных работ
	Общая трудоемкость, в часах	6	108	18	16 (из них 14 – <i>практ. подготовк а)</i>	74	Зачет

4.2. Содержание дисциплины (модуля)

1. Научные методы в обучении математике: опыт, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Анализ и синтез в обучении математике.
2. Виды умозаключений: индукция, дедукция и аналогия в обучении математике.
3. Аксиомы, теоремы и методика работы с ними.
4. Исследовательские задачи в обучении математике. Методика работы с задачами.
5. Методы решения уравнений и неравенств с модулями.
6. Методы решения задач, содержащих параметры.
7. Методы решения геометрических задач повышенной сложности.
8. Методы решения исследовательских задач теории чисел.
9. Методы решения исследовательских задач алгебры.
10. Методы решения олимпиадных задач.

Темы лабораторных работ (Лабораторный практикум)

Не предусмотрены учебным планом ООП

Примерная тематика курсовых работ

Не предусмотрены учебным планом ООП

4.3. Практическая подготовка

Практическая подготовка по дисциплине «Исследовательские задачи в школьном курсе математики» организуется в соответствии с распоряжением Министерства образования и науки Российской Федерации и направлена на формирование у обучающихся профессиональных умений и навыков, необходимых для будущей педагогической деятельности учителя математики при организации исследовательской работы учащихся.

Реализация компонентов образовательной программы в форме практической подготовки осуществляется непрерывно, в рамках проведения практических занятий, путем чередования с

реализацией иных компонентов образовательной программы в соответствии с календарным учебным графиком и учебным планом.

При реализации дисциплины практическая подготовка предусматривает участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью. Данный вид подготовки организован как непосредственно в Университете и его структурных подразделениях, так и в профильных организациях (общеобразовательных школах, лицеях, центрах детского творчества), осуществляющих деятельность по профилю образовательной программы.

Цель практической подготовки – применение теоретических знаний и практических навыков решения исследовательских задач в условиях, максимально приближенных к будущей профессиональной деятельности учителя математики, формирование умений организации исследовательской и проектной деятельности учащихся.

Задачи практической подготовки:

1. Отработка навыков решения исследовательских задач повышенной сложности из различных разделов школьного курса математики.
2. Формирование умения разрабатывать и адаптировать исследовательские задачи для разных возрастных групп и уровней подготовки учащихся.
3. Освоение методики организации исследовательской деятельности учащихся на уроках и во внеурочное время.
4. Развитие способности анализировать и оценивать результаты исследовательской работы учащихся.
5. Формирование готовности к проведению различных форм внеклассных занятий (кружков, факультативов, олимпиад) с элементами исследования.
6. Приобретение практического опыта проектирования исследовательских заданий для учащихся в соответствии с требованиями ФГОС.

Организация практической подготовки:

Практическая подготовка осуществляется в рамках часов, отведенных на практические занятия (всего 14 часов). Виды деятельности обучающихся в рамках практической подготовки включают:

- **Решение исследовательских задач:** Самостоятельное решение задач повышенной сложности с последующим анализом методов и подходов; разработка альтернативных способов решения; построение обобщений и классификаций.
- **Разработка дидактических материалов:** Составление системы исследовательских задач по конкретной теме; разработка заданий для организации поисково-исследовательской деятельности учащихся; создание карточек с исследовательскими заданиями для разных возрастных групп.
- **Проектирование учебных занятий:** Разработка фрагментов уроков с элементами исследования; проектирование внеурочных занятий (математических кружков, факультативов) с использованием исследовательских задач; разработка сценариев олимпиадных заданий.
- **Моделирование педагогической деятельности:** Проведение фрагментов занятий по решению исследовательских задач перед сокурсниками с последующим обсуждением; моделирование ситуаций организации исследовательской работы учащихся.
- **Анализ и рецензирование:** Анализ существующих сборников исследовательских задач с точки зрения их эффективности для развития математического мышления; рецензирование решений задач, выполненных сокурсниками (в роли «учеников»).
- **Использование ИКТ:** Применение математических пакетов (GeoGebra) и цифровых ресурсов для визуализации исследовательских задач и проверки гипотез.

Распределение часов практической подготовки по темам:

№ п/п	Тема	Вид работ практической подготовки	Количество часов
1	Научные методы в обучении математике: опыт, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Анализ и синтез в	Разработка системы заданий на сравнение и обобщение математических объектов; подбор примеров для иллюстрации методов познания в школьном курсе математики.	1

	обучении математике.		
2	Виды умозаключений: индукция, дедукция и аналогия в обучении математике.	Разработка заданий на индуктивные и дедуктивные умозаключения; составление задач на применение аналогии в геометрии и алгебре.	1
3	Аксиомы, теоремы и методика работы с ними.	Разработка фрагмента урока по введению теоремы с элементами исследования; составление системы задач на доказательство теорем различными способами.	1
4	Исследовательские задачи в обучении математике. Методика работы с задачами.	Разработка пакета исследовательских задач по одной теме (с четким выделением этапов исследования); составление методических рекомендаций для учащихся.	1
5	Методы решения уравнений и неравенств с модулями.	Разработка системы исследовательских задач по теме «Модули» (поиск количества решений в зависимости от параметров); моделирование фрагмента урока.	1
6	Методы решения задач, содержащих параметры.	Разработка исследовательских заданий по теме «Параметры» (анализ количества корней, графические интерпретации); составление карточек для кружковой работы.	1
7	Методы решения геометрических задач повышенной сложности.	Разработка системы открытых задач по геометрии (исследование свойств фигур, поиск экстремумов); создание динамических моделей в GeoGebra.	1
8	Методы решения исследовательских задач теории чисел.	Разработка серии задач на исследование делимости, свойств чисел, диофантовых уравнений; составление заданий для математического кружка.	1
9	Методы решения исследовательских задач алгебры.	Разработка системы исследовательских задач по алгебре (многочлены, симметрические выражения, преобразования); анализ возможных обобщений.	1
10	Методы решения олимпиадных задач.	Разработка пакета олимпиадных задач с элементами исследования; составление критериев оценивания и методических рекомендаций по подготовке к олимпиадам.	1
11	Итоговое практическое задание	Разработка полного пакета учебно-методических материалов по организации исследовательской деятельности учащихся по одной из тем школьного курса математики (включая систему задач, методические рекомендации, сценарий занятия).	4
	Всего часов практической подготовки		14

5. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены. В течение семестров студенты решают задачи, указанные преподавателем.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ п/п	Наименование раздела (темы)	Вид самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)
1	Научные методы в обучении математике: опыт, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Анализ и синтез в обучении математике.	Аудиторная работа / Разработка заданий на сравнение	1
		Подобрать 5 примеров для иллюстрации методов сравнения, обобщения, абстрагирования в школьном курсе математики.	
2	Виды умозаключений: индукция, дедукция и аналогия в обучении математике.	Аудиторная работа / Разработка индуктивных задач	1
		Составить 3-4 задачи на индуктивные умозаключения и на применение аналогии.	
3	Аксиомы, теоремы и методика работы с ними.	Аудиторная работа / Разработка доказательств	2
		Разработать фрагмент урока по доказательству теоремы с использованием различных методов.	
4	Исследовательские задачи в обучении математике. Методика работы с задачами.	Теоретический тест / Разработка исследовательских задач	2
		Разработать 3-4 исследовательские задачи по одной из тем школьной математики с описанием этапов исследования.	

5	Методы решения уравнений и неравенств с модулями.	Аудиторная работа / Решение и анализ задач	2
		Решить 10 уравнений и неравенств с модулями повышенной сложности; составить 3 задачи с элементами исследования.	
6	Методы решения задач, содержащих параметры.	Аудиторная работа / Решение и анализ задач	2
		Решить 10 задач с параметрами; разработать 3 исследовательские задачи на поиск количества решений.	
7	Методы решения геометрических задач повышенной сложности.	Аудиторная работа / Решение геометрических задач	2
		Решить 5 геометрических задач повышенной сложности; разработать систему открытых задач.	
8	Методы решения исследовательских задач теории чисел.	Аудиторная работа / Исследование делимости	2
		Исследовать свойства делимости на конкретных примерах; разработать серию задач на делимость.	
9	Методы решения исследовательских задач алгебры.	Аудиторная работа / Исследование многочленов	2
		Исследовать свойства многочленов; разработать задания на симметрические выражения.	
10	Методы решения олимпиадных задач.	Контрольная работа / Разработка олимпиадных заданий	2
		Решить 10 олимпиадных задач; разработать пакет заданий для школьной олимпиады с элементами исследования.	

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество

	их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
--	--

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

Организация и руководство внеаудиторной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка

рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимы для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Задания для исследовательских домашних работ

1. Замечательные числа

Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди всех натуральных чисел с такой же суммой цифр. Например, число 1 замечательное, потому что оно самое маленькое из чисел 1, 10, 100, 1000 и так далее. 1 – это первое замечательное число.

Найдите второе замечательное число. Опишите все числа, у которых сумма цифр такая же. То же для третьего, десятого, 2010-го замечательного числа.

Найдите самое большое двузначное замечательное число. Какой у него номер?

Класс: ≥ 1 , ≤ 6

Раздел: арифметика

2. Прямоугольники с заданной площадью

На клетчатой бумаге нарисуйте все прямоугольники, у которых площадь равна 24 клеткам. (Стороны должны идти по границам клеток.) Сколько получится таких прямоугольников?

Для каких площадей бывает только один прямоугольник? Для каких — два разных прямоугольника? Три разных прямоугольника? Как зависит количество вариантов от площади?

Найдите из всех прямоугольников с одинаковой площадью тот, у которого периметр наименьший.

Класс: ≥ 3 (площадь, периметр), ≤ 5 (простые и составные числа)

Раздел: арифметика, геометрия

3. Разложение числа

Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел: $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. А сколько таких способов для числа 115? Как найти количество способов для произвольного числа?

Класс: ≥ 5 (делители)

Раздел: арифметика

4. Суперкомпьютер

Суперкомпьютер умеет выполнять только одну операцию — операцию смешивания двух чисел: из чисел m , n компьютер получает число $(m+n)/2$. Если $m+n$ — нечетное, то компьютер зависает. Все полученные числа хранятся в памяти. Пусть нам даны три числа, одно из которых ноль, а два другие натуральные и не равны друг другу. Для каких чисел m и n на суперкомпьютере можно получить единицу?

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

5. Диагонали прямоугольников

На листе бумаги в клеточку обвели прямоугольник размером 199×991 клеток. Через сколько узлов (т.е. вершин клеточек) проходит диагональ? Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Попробуйте дать ответ для произвольного размера прямоугольника — размером $M \times N$ клеток.

Примечание. Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутри» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

6. Задача о размене

Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей? Обобщение: какие числа выражаются комбинацией $ax+by$, где a и b – данные натуральные числа, x и y – произвольные целые неотрицательные числа.

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

7. Складные квадраты

Складные числа – это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:

$$5^2=2\underline{5}; \quad 6^2=3\underline{6}; \quad 25^2 = 6\underline{25}.$$

«Пятью **пять** – двадцать **пять**», «шестью **шесть** – тридцать **шесть**».

Найдите как можно больше складных чисел; найдите способ нахождения всех таких чисел.

Класс: ≥ 7

Раздел: арифметика, алгебра

8. Поиск чисел с заданным количеством делителей

Есть только одно число, имеющее ровно один делитель, – это единица. Ровно два делителя имеют все простые числа. Ровно три делителя имеют, например, числа 4 и 9, являющиеся квадратами простых чисел. Все ли числа, имеющие ровно три делителя, обладают этим свойством? Каким может быть вид числа, имеющего ровно 4 делителя? 5 делителей? Для данного натурального числа N опишите все натуральные числа, имеющие ровно N делителей.

Класс: ≥ 7 (основная теорема арифметики)

Раздел: арифметика

9. Разложения дробей

$$\frac{1}{7} \bullet 0,(142857), \frac{2}{7} \bullet 0,(285714), \frac{3}{7} \bullet 0,(428571), \dots$$

Для числа $1/7$ разложение в десятичную дробь периодически и состоит из шести цифр, а для $2/7$, $3/7$, ..., $6/7$ — из тех же шести цифр в другом порядке (проверьте!). А вот для числа $1/13$ и $2/13$ наборы цифр разные. Исследуйте разложения этих чисел и чисел вида $1/p$, $2/p$, ..., $(p-1)/p$, для $p = 17, 19, 41, 47$ и другим простым числам, и разберитесь, какие бывают циклы.

Класс: ≥ 8

Раздел: арифметика

10. Периодические последовательности

Найдите периоды последовательностей:

1) $a_n \equiv n^m \pmod{k}$,

2) $b_n \equiv \varphi_n \pmod{k}$, где φ_n – числа Фибоначчи.

Класс: >=9 (арифметики остатков, бином Ньютона)

Раздел: арифметика

11. Классификация графиков дробно-квадратичных функций

Рассмотрим функцию $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$, где в числителе и в знаменателе – многочлены степени не выше второй. Какие типы графиков могут получиться (исследуйте количество нулей, вертикальных и наклонных асимптот и т.д.)?

Класс: >=8 (дробно-квадратичные функции)

Раздел: алгебра

12. Симметрические многочлены

Симметрические многочлены – это многочлены от двух переменных, которые от замены одной переменной на другую не изменяются. Например: $x^2 + y^2$, $x + y - xy$. Многочлены $u = x + y$ и $v = xy$ называются элементарными симметрическими многочленами.

Верно ли, что любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от элементарных u и v ? Как это сделать быстро?

Обобщение. Поставьте и решите аналогичную задачу для симметрического многочлена от трёх переменных (сколько есть элементарных симметрических многочленов от x, y, z ?).

Класс: >=8 (математическая индукция, бином Ньютона)

Раздел: алгебра

13. Многочлен с заданным нулём

Постройте многочлен с целыми коэффициентами, имеющий ноль $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Постройте многочлен наименьшей степени, обладающий этим свойством.

Обобщение. Та же задача для суммы k квадратных корней из различных простых чисел.

Класс: >=8 (квадратные уравнения, иррациональности)

Раздел: алгебра

14. Иррациональные корни

При каких целых a, b, c корни уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ записываются только через квадратичные иррациональности? (Допускается несколько знаков квадратного корня – один в другом.)

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, замена переменных)

Раздел: алгебра

15. Количество решений

1. Исследуйте количество корней уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ в зависимости от параметров p и q . Нарисуйте на плоскости параметров (p, q) области, соответствующие случаю 4, 3, 2 и т.д. корней.
2. Аналогичная задача для кубического многочлена $x^3 + px + q = 0$.
3. Исследуйте количество корней уравнения $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$ в зависимости от параметров a, b и c . Изобразите соответствующие области в пространстве параметров (a, b, c) .

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, теорема Безу)

Раздел: алгебра

16. Как увидеть симметрию многочлена?

Уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3)=1$ легко решается с помощью замены неизвестной. Для этого достаточно перемножить крайние скобки, перемножить средние скобки: $(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 1$ и сделать замену $t = x^2 + 3x$. Однако, если сразу раскрыть все скобки, то непонятно, как решать полученное уравнение (как увидеть нужную замену):

$$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x - 1 = 0.$$

Требуется исследовать, какая особенность левой части уравнения позволяет сделать нужную замену, какой класс уравнений можно решать подобным способом, как определять для многочлена стандартного вида, можно ли найти его корни соответствующей квадратичной заменой.

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, замена переменной)

Раздел: алгебра

17. Исследование графиков линейных функций на плоскости параметров $(k; b)$

Рассмотрим координатную плоскость $(k; b)$. Каждая прямая вида $y=kx+b$ изображается на этой плоскости в виде точки. На координатной плоскости $(k; b)$ проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости $(x; y)$. Как эти семейства прямых связаны между собой? Аналогичный вопрос для трех параллельных прямых.

Класс: ≥ 7 (линейная функция)

Раздел: алгебра

18. Диофантово уравнение А.А. Маркова

Решить уравнение в целых числах: $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, теорема Виета)

Раздел: алгебра, арифметика

19. Периодическая последовательность

Последовательность $a_{n,2} \bullet \square a_n \square a_{n,1}$ ($a_0 \bullet 0, a_1 \bullet 1$) является периодической (проверьте).
При

каких числах k и l последовательность $a_{n,2} \bullet ka_n \cdot la_{n,1}$ получается периодической? Какой длины может быть период?

Класс: ≥ 9

Раздел: алгебра

Контрольная работа № 1

Вариант № 1.

1. На доске нарисован многоугольник. Отметили середины его сторон, а сам многоугольник стёрли. Как восстановить многоугольник по серединам сторон? Сколько решений имеет задача?
2. На сколько частей можно разбить плоскость n прямыми? Укажите наибольшее и наименьшее число частей. Как надо резать?

Вариант № 2.

1. Назовём многоугольник *равноугольным*, если у него все углы равны. Например, равноугольный четырёхугольник – это прямоугольник. У него равны противоположные стороны, диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам и т.д. А какие свойства есть у равноугольного *шестиугольника*?
2. На клетчатой бумаге обведён прямоугольник размером 3×4 клетки. Сколько на этой картинке квадратов? А сколько прямоугольников? Те же вопросы для прямоугольника размерами $n \times m$.

Контрольная работа № 2

Вариант № 1.

1. Имеется несколько настоящих монет – все одного веса, и одна фальшивая – она легче. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах понадобится, чтобы определить фальшивую монету? Как надо взвешивать? Сначала решите задачу для 3, 9, 27 монет. Та же задача, если фальшивая монета отличается по весу от настоящих, но неизвестно, в какую сторону.

2. В игре Ним играют двое. Есть несколько кучек с камнями. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот игрок, который возьмет камни последним. Требуется разработать стратегию игры в Ним.

Вариант 2.

1. Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки – кому белый, кому черный – наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник, начиная с последнего, должен сказать, какого цвета у него колпак (остальные слышат его ответ). Тех, кто ответил правильно, – отпускают. Остальных – съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?
2. Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей, становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей – черной. Изучить эволюцию узоров.

Вопросы к зачету

1. Научные методы в обучении математике: опыт, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Анализ и синтез в обучении математике.
2. Виды умозаключений: индукция, дедукция и аналогия в обучении математике.
3. Аксиомы, теоремы и методика работы с ними.
4. Исследовательские задачи в обучении математике. Методика работы с задачами.
5. Методы решения уравнений и неравенств с модулями.
6. Методы решения задач, содержащих параметры.
7. Методы решения геометрических задач повышенной сложности.
8. Методы решения исследовательских задач теории чисел.
9. Методы решения исследовательских задач алгебры.
10. Методы решения олимпиадных задач.
11. Организация поисково-исследовательской деятельности учащихся
12. Сравнительная характеристика систем традиционного и развивающего обучения
13. Характеристика проблемного обучения
14. Основные этапы учебного исследования
15. Виды самостоятельных исследовательских работ учащихся
16. Основные этапы научного исследования
17. Технологии проведения исследовательской работы
18. Методика подбора исследовательских задач в 5-7кл.
19. Методика подбора исследовательских задач в 8-9кл.
20. Методика подбора исследовательских задач в 10-11кл.

Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые разделы	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Аудиторная контр.работа(проверка и оценка)	Тема 1- Тема 10	УК-6, ПК-2
2	Теоретический тест	Тема 4	УК-6, ПК-2
3	Самостоятельное решение практических заданий (аудиторная)	Тема 1- Тема 10	УК-6, ПК-2
5	Зачёт в 6 семестре	Тема 1- Тема 10	УК-6, ПК-2

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) исследовательские задачи в школьной математике

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля) исследовательские задачи в школьной математике.

К основной (обязательной) литературе относятся учебники, учебные пособия, учебно-методическая литература и монографии, изучение которых является обязательным для овладения знаниями в полном объеме по дисциплине в соответствии с данной программой. К основной, прежде всего, относится литература, имеющая гриф Министерства образования и науки Российской Федерации или Учебно-методического объединения, рекомендующих издание к использованию в учебном процессе. В списке основной литературы указывается не более пяти источников, имеющих в достаточном количестве в фонде библиотеки. Если доступна электронная версия учебников, учебных пособий и т.д., следует указать для них режим доступа.

К дополнительной относится литература, рекомендуемая бакалаврам, магистрам для самостоятельного изучения при выполнении курсового проекта (работы), учебной научно-исследовательской работы, при написании рефератов, для подготовки к семинарам, практическим занятиям, лабораторным работам и другим учебным занятиям, а также для углубления и расширения знаний по данной дисциплине.

Все источники в основной и дополнительной литературе даются с полными библиографическими описаниями в соответствии с российским или западным стандартами оформления.

Для магистратуры обязательно наличие литературы на английском языке.

7.1. Учебная литература:

Литература

1. В.И. Арнольд «Задачи для детей от 5 до 15 лет». М., МЦНМО, 2004. *«Я глубоко убеждён, что эта культура <мышления> более всего воспитывается ранним самостоятельным размышлением о простых, но не легких вопросах, вроде приведенных ниже».* Несмотря на «детское» название, брошюра весьма содержательна и математически, и методически. В частности, задачи NN 33, 35, 41, 45, 46, 47-49, 55 дают хорошие темы для исследования.
2. Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом. «Заочные математические олимпиады». М., Наука, 1986. *«За разрозненными фактами мы старались увидеть контуры важных математических понятий и конструкций, показать, что обобщение сравнительно несложных задач иногда выводит на передний край математики».* В книге много интересных и содержательных задач и их обсуждения, обобщения, связи с другими задачами.
3. Б.Р. Френкин (сост.). Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы. Вып. 1. М., МЦНМО, 2009. *«... подробно рассмотрен ряд задач, предложенных на Летних конференциях международного Турнира городов, где одарённые школьники из разных стран приобщаются к исследовательской работе в области математики. Приведены решения задач, их обобщения, освещены смежные вопросы. Тематика издания связана с различными областями современной математики.»*
4. С.К. Ландо «Лекции о производящих функциях». М., МЦНМО, 2004. *«Упор в изложении сделан не на общих теориях, а на ярких примерах».* Книга содержит много красивых и доступных школьникам задач перечислительной комбинаторики (числа Каталана, числа Дика, диаграммы Юнга и т.д.).
5. А.К. Звонкин «Малыши и математика». М., МЦНМО-МИОО, 2006. Прекрасная книга об опыте математического кружка для дошкольников, *«учит не математике, а образу жизни».*
6. Д. Пойа. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М., Наука, 1976. УРСС, 2009. *«Обучение математике должно предусматривать ознакомление учащихся (разумеется, в допустимых пределах) со всеми сторонами математической деятельности. Особенно важно, чтобы оно открывало дорогу к самостоятельной творческой работе...»* Формулируются общие подходы к решению задач, обсуждается, какие задачи хороши для исследования, приводится множество примеров.
7. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М., изд-во Иностр. Лит, 1957. УРСС, 2009. *«Будем учиться доказывать, но будем учиться также догадываться.»* На большом числе примеров демонстрируются основные приёмы догадки – индукция и аналогия. Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду. / Под редакцией А.А. Заславского и др. М., МЦНМО, 2009. *«...основу математического образования сильного ученика должно составлять решение и обсуждение задач, в процессе работы над которыми он знакомится с важными математическими идеями и теориями».* Многие задачи сборника можно превратить в хорошие темы для исследования.

8. С.А. Генкин и др. Ленинградские математические кружки. Киров, АСА. 1994. Замечательная книга, содержащая кроме прочего подборку исследовательских задач, *«суть которых состоит в последовательном решении цепочки нетрудных лемм, складывающихся в доказательство довольно трудной теоремы»* (сс. 221-223). См. также сс. 236-239, где описан математический аукцион – соревнование по задачам, допускающим постепенное достижение цели.
9. Д.Э. Шноль, А.И. Сгибнев, Н.М. Нетрусова «Система открытых задач по геометрии. 7 класс. 8 класс.» М., Чистые пруды, 2009 (<http://sch-int.ru/intel/index.php/kafmatem>). Практически весь курс геометрии 7-8 класса изложен в виде открытых задач, допускающих в обучении элементы исследования.

7.2. Интернет-ресурсы

<http://www.lib.mexmat.ru> - Электронная библиотека механико-математического факультета Московского государственного университета

<http://www.mathnet.ru/> - Общероссийский математический портал Math-Net.Ru — это современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.benran.ru/> - Библиотека по естественным наукам Российской Академии Наук.

7.3. Программное обеспечение:

1. Microsoft Excel
2. Microsoft Word
3. Microsoft PowerPoint

7.4. Материально-техническое обеспечение

В организации учебного процесса необходимыми являются средства, обеспечивающие аудиовизуальное восприятие учебного материала (специализированное демонстрационное оборудование):

№ п/п	Наименование оборудования / технических средств	Количество	Назначение
1	Доска и мел (или более современные аналоги)	1	Проведение лекционных и практических занятий, решение задач
2	Компьютерные и мультимедийные технологии (проектор, экран)	1	Демонстрация презентаций, учебных материалов, визуализация решений исследовательских задач
3	Микрофон и соответствующие установки	1	Для работы в больших аудиториях с многочисленными группами студентов
4	Интерактивная доска	1	Проведение практических занятий с использованием интерактивных методов
5	Компьютерный класс с доступом в Интернет и программным обеспечением (GeoGebra, Wolfram Alpha)	1	Проведение практических занятий по решению исследовательских задач с использованием ИКТ, визуализация математических объектов, проверка гипотез
6	Принтер, МФУ	1	Печать раздаточных материалов, исследовательских заданий, дидактических карточек

7	Набор геометрических моделей и макетов	1 комплект	Визуализация геометрических исследовательских задач
---	--	------------	---

Рабочая программа дисциплины **Исследовательские задачи в школьном курсе математики** составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки **01.03.01 Математика** (уровень высшего образования бакалавриат), утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 8 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования»

Программу составил:

Ст. преподаватель кафедры «Математический анализ» Аушева М.А.

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ» Протокол № 8 от «27» апреля 2026г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета протокол № 6 от «28» апреля 2026 г.

1. Перечень компетенций, с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы.

При освоении дисциплины (модуля) компетенции, закрепленные за ней, реализуются по темам (разделам) дисциплины (модуля), в определенной степени (полностью или в оговоренной части) и на определенном этапе

Таблица 1.

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
УК-6	Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни	УК-6.1. Использует инструменты и методы управления временем при выполнении конкретных задач, проектов, при достижении поставленных целей; УК-6.2. Определяет приоритеты собственной деятельности, личностного развития и профессионального роста; УК-6.3. Оценивает требования рынка труда и предложения образовательных услуг для выстраивания траектории собственного профессионального роста; УК – 6.4. Строит профессиональную карьеру и определяет стратегию профессионального развития.
ПК-2	Способность математически корректно ставить естественнонаучные задачи, знание постановок классических задач математики	ПК-2.1: Знает способы определения видов и типов профессиональных задач, структурирования задач различных групп. ПК-2.2: Выбирает наиболее эффективные методы решения основных типов задач, встречающихся в математике. ПК-2.3: Обладает систематизированными теоретическими и практическим знаниями.

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2.

Сопоставление шкал оценивания

4-балльная шкала (уровень освоения)	Отлично (повышенный уровень)	Хорошо (базовый уровень)	Удовлетворительно (пороговый уровень)	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)
100-	91-100	81-90	61-80	0-60
балльная шкала				
Бинарная шкала	Зачтено			Не зачтено

Таблица 3.

Оценивание ответа на вопросы по темам для устного опроса

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	- Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи.	Студентом дан полный, в логической последовательности развернутый ответ на поставленный вопрос, где он продемонстрировал знания предмета в полном объеме учебной программы, достаточно глубоко осмысливает дисциплину, приводит собственные примеры по проблематике поставленного вопроса
Хорошо (базовый уровень)		Студентом дан развернутый ответ на поставленный вопрос, приводит примеры, в ответе присутствует свободное владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Однако допускается неточность в ответе.
Удовлетворительно (пороговый уровень)		Студентом дан ответ, свидетельствующий в основном о знании процессов изучаемой дисциплины, отличающийся недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы, знанием основных вопросов теории, недостаточным умением давать аргументированные

		ответы и приводить примеры, недостаточно свободным владением монологической речью, логичностью и последовательностью ответа.
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		Студентом дан ответ, который содержит ряд серьезных неточностей, обнаруживающий незнание процессов изучаемой предметной области, отличающийся неглубоким раскрытием темы, незнанием основных вопросов теории, неумением давать аргументированные ответы, слабым владением монологической речью, отсутствием логичности и последовательности. Студент не способен ответить на вопросы даже при дополнительных наводящих вопросах преподавателя.

Таблица 4.

Оценивание подготовки рефератов

4-балльная шкала (уровень освоения)	Показатели	Критерии
Отлично (повышенный уровень)	- Полнота изложения теоретического материала; - Правильность и/или аргументированность изложения (последовательность действий); - Самостоятельность ответа; - Культура речи.	выполнены все требования к написанию и защите реферата: обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция, сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём, соблюдены требования к внешнему оформлению, даны правильные ответы на дополнительные вопросы

Хорошо (базовый уровень)		основные требования к реферату и его защите выполнены, но при этом допущены недочёты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объём реферата; имеются упущения в оформлении; на дополнительные вопросы при защите даны неполные ответы
Удовлетворительно (пороговый уровень)		имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата или при ответе на дополнительные вопросы; во время защиты отсутствует вывод
Неудовлетворительно (уровень не сформирован)		тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы

Таблица 5.

Оценивание ответа на зачете

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Задания для исследовательских домашних работ

1. Замечательные числа

Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди всех натуральных чисел с такой же суммой цифр. Например, число 1 замечательное, потому что оно самое маленькое из чисел 1, 10, 100, 1000 и так далее. 1 – это первое замечательное число. Найдите второе замечательное число. Опишите все числа, у которых сумма цифр такая же. То же для третьего, десятого, 2010-го замечательного числа.

Найдите самое большое двузначное замечательное число. Какой у него номер?

Класс: ≥ 1 , ≤ 6

Раздел: арифметика

2. Прямоугольники с заданной площадью

На клетчатой бумаге нарисуйте все прямоугольники, у которых площадь равна 24 клеткам. (Стороны должны идти по границам клеток.) Сколько получится таких прямоугольников?

Для каких площадей бывает только один прямоугольник? Для каких – два разных прямоугольника? Три разных прямоугольника? Как зависит количество вариантов от площади?

Найдите из всех прямоугольников с одинаковой площадью тот, у которого периметр наименьший.

Класс: ≥ 3 (площадь, периметр), ≤ 5 (простые и составные числа)

Раздел: арифметика, геометрия

3. Разложение числа

Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел: $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. А сколько таких способов для числа 115? Как найти количество способов для произвольного числа?

Класс: ≥ 5 (делители)

Раздел: арифметика

4. Суперкомпьютер

Суперкомпьютер умеет выполнять только одну операцию- операцию смешивания двух чисел: из чисел m , n компьютер получает число $(m+n) / 2$. Если $m+n$ – нечетное, то компьютер зависает. Все полученные числа хранятся в памяти. Пусть нам даны три числа, одно из которых ноль, а два другие натуральные и не равны друг другу. Для каких чисел m и n на суперкомпьютере можно получить единицу?

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

5. Диагонали прямоугольников

На листе бумаги в клеточку обвели прямоугольник размером 199 x 991 клеток. Через сколько узлов (т.е. вершин клеточек) проходит диагональ? Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Попробуйте дать ответ для произвольного размера прямоугольника – размером $M \times N$ клеток.

Примечание. Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутрь» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

6. Задача о размене

Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей? Обобщение: какие числа выражаются комбинацией $ax+by$, где a и b – данные натуральные числа, x и y – произвольные целые неотрицательные числа.

Класс: ≥ 6 (НОД)

Раздел: арифметика

7. Складные квадраты

Складные числа – это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:

$$5^2=2\underline{5}; \quad 6^2=3\underline{6}; \quad 25^2 = 6\underline{25}.$$

«Пятью **пять** – двадцать **пять**», «шестью **шесть** – тридцать **шесть**».

Найдите как можно больше складных чисел; найдите способ нахождения всех таких чисел.

Класс: ≥ 7

Раздел: арифметика, алгебра

8. Поиск чисел с заданным количеством делителей

Есть только одно число, имеющее ровно один делитель, - это единица. Ровно два делителя имеют все простые числа. Ровно три делителя имеют, например, числа 4 и 9, являющиеся квадратами простых чисел. Все ли числа, имеющие ровно три делителя, обладают этим свойством? Каким может быть вид числа, имеющего ровно 4 делителя? 5 делителей? Для данного натурального числа N опишите все натуральные числа, имеющие ровно N делителей.

Класс: ≥ 7 (основная теорема арифметики)

Раздел: арифметика

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{7} \bullet 0,(142857) & \frac{2}{7} \bullet 0,(285714) & \frac{3}{7} \bullet \\ 0,(428571), \dots & & \end{array}$$

Для числа $1/7$ разложение в десятичную дробь периодически и состоит из шести цифр, а для $2/7, 3/7, \dots, 6/7$ — из тех же шести цифр в другом порядке (проверьте!). А вот для числа $1/13$ и $2/13$ наборы цифр разные. Исследуйте разложения этих чисел и чисел вида $1/p, 2/p, \dots, (p-1)/p$, для $p = 17, 19, 41, 47$ и другим простым числам, и разберитесь, какие бывают циклы.

Класс: ≥ 8

Раздел: арифметика

9. Периодические последовательности

Найдите периоды последовательностей:

- 1) $a_n \equiv n^m \pmod{k}$,
- 2) $b_n \equiv \varphi_n \pmod{k}$, где φ_n — числа Фибоначчи.

Класс: ≥ 9 (арифметики остатков, бином

Ньютона) **Раздел:** арифметика

Рассмотрим функцию $y = \frac{ax^2 \cdot bx \cdot c}{dx^2 \cdot ex \cdot f}$, где в числителе и в знаменателе — многочлены

степени не выше второй. Какие типы графиков могут получиться (исследуйте количество нулей, вертикальных и наклонных асимптот и т.д.)?

Класс: ≥ 8 (дробно-квадратичные функции)

Раздел: алгебра

10. Симметрические многочлены

Симметрические многочлены — это многочлены от двух переменных, которые от замены одной переменной на другую не изменяются. Например: $x^2 + y^2$, $x + y - xy$. Многочлены $u = x + y$ и $v = xy$ называются элементарными симметрическими многочленами.

Верно ли, что любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от элементарных u и v ? Как это сделать быстро?

Обобщение. Поставьте и решите аналогичную задачу для симметрического многочлена от трёх переменных (сколько есть элементарных симметрических многочленов от x, y, z ?).

Класс: >=8 (математическая индукция, бином Ньютона)

Раздел: алгебра

11. Многочлен с заданным нулём

Постройте многочлен с целыми коэффициентами, имеющий ноль $x \bullet \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

Постройте многочлен наименьшей степени, обладающий этим свойством.

Обобщение. Та же задача для суммы k квадратных корней из различных простых чисел.

Класс: >=8 (квадратные уравнения, иррациональности)

Раздел: алгебра

12. Иррациональные корни

При каких целых a, b, c корни уравнения $x^4 \cdot ax^2 \cdot bx \cdot c \bullet 0$ записываются только через

квадратичные иррациональности? (Допускается несколько знаков квадратного корня –один в другом.)

Класс: >=8 (квадратные уравнения, замена переменных)

Раздел: алгебра

13. Количество решений

1. Исследуйте количество корней уравнения $x^4 \cdot px^2 \cdot q \bullet 0$ в зависимости от

параметров p и q . Нарисуйте на плоскости параметров (p, q) области, соответствующие случаю 4, 3, 2 и т.д. корней.

2. Аналогичная задача для кубического многочлена $x^3 + px + q = 0$.

3. Исследуйте количество корней уравнения $x^4 \cdot ax^2 \cdot bx \cdot c \bullet 0$ в зависимости от

параметров a, b и c . Изобразите соответствующие области в пространстве параметров (a, b, c) .

Класс: >=8 (квадратные уравнения, теорема Безу)

Раздел: алгебра

14. Как увидеть симметрию многочлена?

Уравнение $x(x+1)(x+2)(x+3)=1$ легко решается с помощью замены неизвестной. Для этого достаточно перемножить крайние скобки, перемножить средние скобки: $(x^2 \cdot 3x)(x^2 \cdot 3x \cdot 2) \bullet 1$ и сделать замену $t \bullet x^2 \cdot 3x$. Однако, если сразу раскрыть

все скобки, то непонятно, как решать полученное уравнение (как увидеть нужную замену):

$$x^4 \cdot 6x^3 \cdot 11x^2 \cdot 6x - 1 \bullet 0.$$

Требуется исследовать, какая особенность левой части уравнения позволяет сделать

нужную замену, какой класс уравнений можно решать подобным способом, как определять для многочлена стандартного вида, можно ли найти его корни соответствующей квадратичной заменой.

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, замена переменной)

Раздел: алгебра

15. Исследование графиков линейных функций на плоскости параметров $(k; b)$

Рассмотрим координатную плоскость $(k; b)$. Каждая прямая вида $y=kx+b$ изображается на этой плоскости в виде **точки**. На координатной плоскости $(k; b)$ проведено три прямые, проходящие через одну точку. Каждая такая прямая изображает некоторое семейство прямых на плоскости $(x; y)$. Как эти семейства прямых связаны между собой? Аналогичный вопрос для трех параллельных прямых.

Класс: ≥ 7 (линейная функция)

Раздел: алгебра

Решить уравнение в целых числах: $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$.

Класс: ≥ 8 (квадратные уравнения, теорема Виета)

Раздел: алгебра, арифметика

Последовательность a_n $\bullet$ $\square a_n$ $\square$ a_{n+1} ($a_0 \bullet 0, a_1 \bullet 1$) является периодической (проверьте).

При каких числах k и l $a_n \bullet kan + lan + 1$ получается периодической?
последовательность Какой длины может
быть период?

Класс: ≥ 9

Раздел: алгебра

Контрольная работа № 1

Вариант № 1.

1. На доске нарисован многоугольник. Отметили середины его сторон, а сам многоугольник стёрли. Как восстановить многоугольник по серединам сторон? Сколько решений имеет задача?
2. На сколько частей можно разбить плоскость n прямыми? Укажите наибольшее и наименьшее число частей. Как надо резать?

Вариант № 2.

1. Назовём многоугольник *равноугольным*, если у него все углы равны. Например, равноугольный четырёхугольник — это прямоугольник. У него

равны

противоположные стороны, диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам и т.д. А какие свойства есть у равноугольного *шестиугольника*?

2. На клетчатой бумаге обведён прямоугольник размером 3×4 клетки. Сколько на этой картинке квадратов? А сколько прямоугольников? Те же вопросы для прямоугольника размерами $n \times m$.

Контрольная работа № 2

Вариант № 1.

1. Имеется несколько настоящих монет – все одного веса, и одна фальшивая – она легче. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах понадобится, чтобы определить фальшивую монету? Как надо взвешивать? Сначала решите задачу для 3, 9, 27 монет. Та же задача, если фальшивая монета отличается по весу от настоящих, но неизвестно, в какую сторону.

2. В игре Ним играют двое. Есть несколько кучек с камнями. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот игрок, который возьмет камни последним. Требуется разработать стратегию игры в Ним.

Вариант 2.

1. Мудрецы попали в плен к людоедам. У людоедов есть такой обычай. Пойманных пленников выстраивают в колонну и надевают им на головы колпаки – кому белый, кому черный – наугад. Каждый пленник видит, какого цвета колпаки у всех, кто стоит перед ним, но не знает, какой колпак у него самого и у всех, кто стоит за ним. Каждый пленник, начиная с последнего, должен сказать, какого цвета у него колпак (остальные слышат его ответ). Тех, кто ответил правильно, – отпускают. Остальных – съедают. Мудрецы знают про обычай и могут между собой договориться. Как мудрецам спасти побольше человек? Какое наибольшее число человек можно спасти в самом худшем случае?
2. Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей, становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей – черной. Изучить эволюцию узоров.

Вопросы к зачету:

1. Научные методы в обучении математике: опыт, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Анализ и синтез в обучении математике.
2. Виды умозаключений: индукция, дедукция и аналогия в обучении математике.
3. Аксиомы, теоремы и методика работы с ними.
4. Исследовательские задачи в обучении математике. Методика работы с задачами.
5. Методы решения уравнений и неравенств с модулями.
6. Методы решения задач, содержащих параметры.

7. Методы решения геометрических задач повышенной сложности.
8. Методы решения исследовательских задач теории чисел.
9. Методы решения исследовательских задач алгебры.
10. Методы решения олимпиадных задач.
11. Организация поисково-исследовательской деятельности учащихся
12. Сравнительная характеристика систем традиционного и развивающего обучения
13. Характеристика проблемного обучения
14. Основные этапы учебного исследования
15. Виды самостоятельных исследовательских работ учащихся
16. Основные этапы научного исследования
17. Технологии проведения исследовательской работы
18. Методика подбора исследовательских задач в 5-7кл.
19. Методика подбора исследовательских задач в 8-9кл.
20. Методика подбора исследовательских задач в 10-11кл.

Сведения об утверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой

